Guía de Discretas 1

Elaborado por Christian Alexander Oliveros Labrador, Cohorte 13. Ing. Computación.

Actualizada: 4 de diciembre de 2016. El orden de los temas es basado en el cronograma del curso Enero-Marzo 2015 (Septiembre-Diciembre si no se cuenta el retraso).

Agradecimientos a Víctor Hernández, Alejandro Martínez y Carlos Nexans por correcciones de errores.

Página: oliveroschristian.wordpress.com

Índice

Problemas

Conjuntos y Funciones

1. Pertenencia, Verdadero o Falso:
   a. $1 \in \{1,2,3\}$
   b. $x \in \{x, a, 5\}$
   c. $a \in \{\{a\}\}$
   d. $x \in x$
   e. $\{0\} \in \{\{0\}, 1,2\}$
   f. $5 \in \{x |\ x\ es\ primo\}$
   g. $\{1, x, a\} \in \{\{1, x, a\}, a, b, c\}$
   h. $\{\{a\}, b\} \in \{\{\{a\}, b\}\}$

2. Subconjuntos. Dados ϕ, $A = \{1, \{2\}, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, 1\}, D = \{a\}$, $E = \{1,3\}\ y\ F = \{2\}$ determinar quién es subconjunto de quien.
3. Conjunto de Partes. Dados $A = \{a, b\}$, $B = \{1,2,3\}, C = \{0\}\ y\ \phi$ determinar el Conjunto de Partes de cada uno.
4. Dado $A = \{a, b, c\}$. Determinar:
   a. $\binom{A}{2}$
   b. $\binom{A}{0}$
   c. $\binom{A}{1}$
   d. $\binom{A}{3}$
5. Unión, Intersección y Diferencia. Dados $A = \{a, b, \{c, d\}, e\}$ y $B = \{a, \{c, d\}, f\}$:
   a. $A \cup B$
   b. $A \cap B$
   c. $A - B$
6. Producto Cartesiano. Dados $A = \{a, b, c\}\ y\ B = \{1,2\}$, calcular $AxB.$
7. Cardinalidad. Dados $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1,2\}\ y\ C = \{c, d, e\}$ calcular la Cardinalidad de los siguientes conjuntos:
   a. $A \cup B$
   b. $A \cap C$
   c. $A - C$
   d. AxB
   e. AxA
   f. AxC
   g. $A \cup C$
   h. $\rho(A)$
8. Particiones. Dado $A = \{a, b, c\}$ escribir todas sus particiones.
9. Dadas las siguientes funciones, demostrar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:
   a. $f(x) = x^2$ Rango $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$
   b. $f(x) = x$
   c. $f(x) = tan(x)$ Dom$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
   d. $f(n) = n + 1$ Dom y Rango $\mathbb{N}$

Conteo

10. Dado un alfabeto de 6 letras, ¿Cuántas palabras de largo 5 se pueden hacer?
11. Dado 5 elementos distintos, ¿De cuantas maneras se pueden ordenar los mismos en una línea?
12. Dado un conjunto X de 10 elementos y un conjunto A de 30 elementos:
    a. ¿Cuántas funciones de X en A existen?
    b. ¿Cuántas funciones de X en A son inyectivas?
    c. ¿Cuántas funciones de X en A asignan el elemento x_i al elemento a_i?

d. ¿Cuántas funciones de X en A asignan el elemento x_i al elemento a_i y el elemento x_j al elemento a_j?

13. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 10 personas en 10 asientos?
14. Dado $\{\cdot, -\}$ (Código Morse) hallar la cantidad de mensajes que tienen hasta un máximo de 4 pulsaciones.
15. Dados 9 alumnos. ¿De cuantas formas se pueden hacer grupos de 3 alumnos?
16. Dado el universo $\{1,3,5,7,9\}$:
    a. ¿Cuántos números se pueden hacer sin repetir alguno de los dígitos y utilizándolos todos?
    b. ¿Cuántos de esos números son mayores que 70.000?
17. Dado n parejas casadas. ¿De cuántas formas se puede escoger dos personas no casadas entre sí y que no sean del mismo género?
18. ¿De cuántas formas se pueden sentar 12 personas en un banco de 4 personas?
19. Dado un estante con 8 libros de inglés, 7 de francés , 5 de alemán y 2 de castellano:
    a. ¿De cuantas maneras se puede escoger un libro?
    b. ¿De cuantas maneras se puede escoger un libro de cada idioma?
20. ¿Cuántos órdenes circulares se pueden hacer con n elementos?
21. En un banco hay k taquillas y n clientes; ¿de cuantas formas las n personas pueden hacer colas frente a las k taquillas? (Importa el orden)
22. Se desean colocar n bolas en k cajas. ¿De cuantas formas se puede hacer esto sí?:
    a. Las cajas son distinguibles, las bolas son indistinguibles y no se permiten cajas vacías.
    b. Las cajas son distinguibles, las bolas son indistinguibles y se permiten cajas vacías.
    c. Pueden haber cajas vacías, las bolas y cajas son distinguibles. El orden importa.
    d. Pueden haber cajas vacías, las bolas y cajas son distinguibles. El orden no importa.
    e. No pueden haber cajas vacías, las bolas y cajas son distinguibles. El orden no importa.
23. Dados 20, de los cuales sólo 3 son iguales y una repisa donde solo caben 12. ¿De cuántas formas se pueden organizar los libros en la repisa si siempre tienen que estar los 3 libros iguales?
24. ¿Cuántas particiones de $[8]$ hay de tipo $(1,2,1,0,0,0,0,0)$?
25. Probar Combinatoriamente:
    a. $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$
    b. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

Sumatorias

26. Determinar el tercer término de la expresión $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{x-2}{2}\right)^6$, sin desarrollar el polinomio.
27. Hallar la forma cerrada de las siguientes sumas:
    a. $\sum_{i=0}^{n} i$
    b. $\sum_{i=0}^{n} i^2$
    c. $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{5^i}$
    d. $\sum_{i=0}^{n} i^3$
    e. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}$
    f. $\sum_{k=0}^{n} 2^k$
28. Demostrar la Serie Geométrica para $r \neq 1$.

29. Demostrar la Suma Paralela.
30. Demostrar la Suma Superior.

Inclusión-Exclusión

31. En una escuela hay 200 estudiantes y existen tres materias, las cuales son Probabilidades, Trigonometría y Álgebra. En este momento hay 80 estudiantes cursando Probabilidades, 80 cursando Trigonometría y 80 cursando Álgebra. Se sabe que 30 estudiantes están cursando cualquier par de las tres materias y 15 estudiantes están cursando las tres. ¿Cuántos estudiantes no están cursando ninguna de las tres materias?
32. ¿Cuántas permutaciones de la palabra TAMELY satisfacen que la T aparece antes que la A o la A aparece antes que la M o la M aparece antes que la E?
33. Dado $A = \{0,1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3\}$. Calcular la cantidad de funciones sobreyectivas, usando el principio de Inclusión-Exclusión.
34. Hallar cuantos números enteros positivos menores o iguales que 144 que no son divisibles por 2, 3 y 5.
35. Hallar cuantos números enteros positivos menores o iguales que 144 que no son divisibles por 2 ni 3 pero si por 5.
36. Dado una población de T individuos, tienen los siguientes gustos: a 45% de la población le gusta beber vino, a 60% le gusta beber jugo de naranja, a 55% le gusta beber té, a 35% e gusta beber vino y jugo de naranja, a 35% le gusta beber vino y té, a 35% le gusta beber jugo de naranja y té, y a 25% de la población le gusta beber las tres bebidas.
    a. ¿Qué porcentaje de la población le gusta beber sólo vino?
    b. ¿Cuál es el porcentaje de la población que le gusta exactamente dos bebidas?
37. Usando la Φ (Phi) de Euler calcular:
    a. ¿Cuántos números entre 1 y 30 son coprimos con 30?
    b. ¿Cuántos números entre 1 y 280 son coprimos con 280?

Recursiones

38. Resolver $X_n = X_{n-1} + \binom{n-1}{3}$ con $n \geq 4$ y $X_3 = 0$
39. Resolver $A_n = 2 * A_{n-1} + (-1)^n$ con $n \geq 1$ y $A_0 = 2$
40. Resolver $X_n = 1{,}06 * X_{n-1} + 50$ con $n \geq 1$ y $X_0 = 50$
41. Resolver $X_n = 2 * X_{n-1}$ con $n \geq 2$ y $X_1 = 3$
42. Resolver $2 * A_n = n * A_{n-1} + 3 * n!$ con $n \geq 1$ y $A_0 = 5$
43. Resolver Fibonacci con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$
44. Resolver $X_n = -4 * X_{n-1} - 4 * X_{n-2}$ con $X_0 = 3$ y $X_1 = 2$
45. Resolver $X_n = -4 * X_{n-2} - 4 * X_{n-4}$ con $X_0 = 1$, $X_1 = 2$, $X_2 = 3$ y $X_3 = 2$
46. Resolver $2 * X_n + X_{n-1} - 3 * X_{n-2} = 2^n$ con $X_0 = 0$ y $X_1 = 1$
47. Resolver $2 * X_n + X_{n-1} - 3 * X_{n-2} = n - 1$
48. Utilizando el Método dela Función Generatriz resolver $A_n = 2 * A_{n-1} + 1$ con $n \geq 1$ y $A_0 = 1$
49. Resolver $X_n = -4 * X_{n-2} - 4 * X_{n-4}$ con $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$ y $n \geq 4$
50. Resolver $X_n = -4 * X_{n-2} - 4 * X_{n-4}$ con $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 1$ y $n \geq 4$

Operadores

51. Determinar las siguientes expresiones:

a. $(\Delta_h + I)(\Delta_h - I)(x^2 - 1)$
b. $(E_h - 2I)(E_h - I)(2^x + x)$
c. $(E_h + 2I)\big(2sen(2x)\big)$
d. $\Delta_h(x2^{x+1})$
e. $\Delta_h\left(\frac{sen(2x)}{x+1}\right)$
f. $2x^{(3)} - 3x^{(2)}$

52. Escribir $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como combinación lineal de $(x-1)^{(0)}$, $(x-1)^{(1)}$, $(x-1)^{(2)}$ y $(x-1)^{(3)}$. Tomando $h = 1$.
53. Resolver:
    a. $\frac{\Delta_h}{h}\left(3x^{(3)} + 2x^{(-2)}\right)$
    b. $\frac{\Delta_h}{h}(x2^{x+1})$
    c. $\frac{\Delta_h}{h}\left(\frac{sen(2x)}{x+1}\right)$
54. Encontrar el polinomio factorial asociado a $x^5 + x^3 - x^2 + 5$. Tomando $h = 1$.
55. Utilizando la fórmula de Gregory-Newton transformar a polinomio factorial el polinomio $2x^4 + x^2 + 3$ con $h = 1$ y $a = 1$.
56. Resolver $\sum_{x=1}^{n} x(n-x)$. Tomando $h = 1$.
57. Resolver $\sum_{x=1}^{n} sen\left(\frac{\pi}{n}x\right)$. Tomando $h = 1$.
58. Resolver $\sum_{x=1}^{n} 2^x sen\left(\frac{\pi}{n}x\right)$. Tomando $h = 1$.
59. Resolver $\sum_{x=1}^{n} xcos(\pi x)$. Tomando $h = 1$.
60. Resolver $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)(2i+3)(2i+5)$. Tomando $h = 1$.
61. Utilizando la Fórmula de Abel resolver $\sum_{i=1}^{n} i(-1)^{i+1}$. Tomando $h = 1$.
62. Resolver $\sum_{x=1}^{n} \frac{(x+3)}{x(x+1)(x+2)}$. Tomando $h = 1$.
63. Resolver $\frac{1}{2*4} + \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(2x+1)(2x+3)}$. Tomando $h = 1$.
64. Resolver $\sum_{x=0}^{n} \frac{1}{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}$. Tomando $h = 1$.
65. Resolver $\sum_{x=0}^{n} \frac{(2x+2)}{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}$. Tomando $h = 1$.
66. Resolver $\sum_{x=1}^{n}(x-1)^{(2)}2^x$. Tomando $h = 1$.
67. Resolver $\sum_{x=1}^{n} x^2 - 2x + 1$. Tomando $h = 1$.

Crecimiento Asintótico y Aproximación Asintótica

68. Demostrar que $3n^2 + 180n$ es $\Theta(n^2)$ utilizando la definición.
69. Demuestre que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$.
70. Demostrar $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{ln(n)}{n} + O\left(\frac{ln(n)^2}{n^2}\right)$ usando lo demostrado en el ejercicio anterior.
71. Hallar una aproximación asintótica, con error absoluto $O(n^{-2})$, de la expresión $\left(3n^2 - n^{-1} + O(n^{-4})\right)\left(10n^2 + ln(n) + O(n^{-5})\right)$.
72. Determine si existe dominación asintótica, del tipo O grande u Ω entre las funciones que se indican a continuación:
    a. $f(n) = n^2$
    b. $f(n) = n^2 + 1000n$
    c. $f(n) = \begin{cases} n \; si \; n < 100 \\ n^3 \; si \; n \geq 100 \end{cases}$

d. $f(n) = \begin{cases} n\ si\ n\ es\ par \\ n^3\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$

e. $f(n) = ln\left(n^{ln(2n)}\right)$

73. Dado f, que es $O\left(n^{\frac{-1}{3}}\right)$. Determinar $\lim_{n\to\infty} f(n)$.
74. Dado f es $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Demostrar:
    a. $\frac{f(n)}{1+\frac{a}{\sqrt{n}}}$ es $O\left(\frac{1}{n}\right)$
    b. $\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)f(n)$ es $O\left(\frac{1}{n}\right)$
    c. $1+\frac{a}{\sqrt{n}}+f(n)$ es $O\left(\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

Respuestas

Conjuntos y Funciones

1. Pertenencia, Verdadero o Falso:

a. Verdadero
b. Verdadero
c. Falso
d. Falso
e. Verdadero
f. Verdadero
g. Verdadero
h. Verdadero

2. Subconjuntos. Dados ϕ, $A = \{1, \{2\}, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, 1\}, D = \{a\}, E = \{1,3\}\ y\ F = \{2\}$ determinar quién es subconjunto de quien.

Respuesta: ϕ es subconjunto de cualquier conjunto; D es subconjunto de B y C; y E es subconjunto de A.

3. Conjunto de Partes. Dados $A = \{a, b\}, B = \{1,2,3\}, C = \{0\}\ y\ \phi$ determinar el Conjunto de Partes de cada uno.

Respuesta: $\rho(A) = \{\phi, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$ $\rho(B) = \{\phi, \{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$
$\rho(C) = \{\phi, \{0\}\}$ $\rho(\phi) = \{\phi\}$

4. Dado $A = \{a, b, c\}$. Determinar:
   1. $\binom{A}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
   2. $\binom{A}{0} = \{\phi\}$
   3. $\binom{A}{1} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
   4. $\binom{A}{3} = \{\{a, b, c\}\}$
5. Unión, Intersección y Diferencia. Dados $A = \{a, b, \{c, d\}, e\}$ y $B = \{a, \{c, d\}, f\}$:
   1. $A \cup B = \{a, b, \{c, d\}, e, f\}$
   2. $A \cap B = \{a, \{c, d\}\}$
   3. $A - B = \{b, e\}$
6. Producto Cartesiano. Dados $A = \{a, b, c\}\ y\ B = \{1,2\}$, calcular AxB:

   Respuesta: $AxB = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$
7. Cardinalidad. Dados $A = \{a, b, c\}, B = \{1,2\}\ y\ C = \{c, d, e\}$ calcular la Cardinalidad de los siguientes conjuntos:

   a. 5
   b. 1

c. 2
d. 6
e. 9
f. 9
g. 5
h. $2^3 = 8$

8. Particiones. Dado $A = \{a, b, c\}$ escribir todas sus particiones.
   Respuesta: $\{\{\boldsymbol{a}\}, \{\boldsymbol{b}\}, \{\boldsymbol{c}\}\}$, $\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}, \{\boldsymbol{c}\}\}$, $\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}, \{\boldsymbol{b}\}\}$, $\{\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}, \{\boldsymbol{a}\}\}$, $\{\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}\}$
9. Dadas las siguientes funciones, demostrar si son $inyectivas$, $sobreyectivas$ o $biyectivas$:
   a. $Sobreyectiva$
   b. $Biyectiva$
   c. $Biyectiva$
   d. $Inyectiva$

Conteo

10. Dado un alfabeto de 6 letras, ¿Cuántas palabras de largo 5 se pueden hacer?
    Respuesta: $6^5 = 7776$
11. Dado 5 elementos distintos, ¿De cuantas maneras se pueden ordenar los mismos en una línea?
    Respuesta: $5! = 120$
12. Dado un conjunto X de 10 elementos y un conjunto A de 30 elementos:
    a. 30^{10}
    b. $30^{\underline{10}}$
    c. 30^9
    d. 30^8
13. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 10 personas en 10 asientos?
    Respuesta: $10!$
14. Dado $\{\cdot, -\}$ (Código Morse) hallar la cantidad de mensajes que tienen hasta un máximo de 4 pulsaciones.
    Respuesta: 30
15. Dados 9 alumnos. ¿De cuantas formas se pueden hacer grupos de 3 alumnos?
    Respuesta: $\binom{9}{3} * \binom{6}{3} * \binom{3}{3} = 84 * 20 * 1$
16. Dado el universo $\{1,3,5,7,9\}$:
    a. $5!$
    b. $4! + 4!$
17. Dado n parejas casadas. ¿De cuántas formas se puede escoger dos personas no casadas entre sí y que no sean del mismo género?
    Respuesta: $\binom{2n}{2} - n - \binom{n}{2} - \binom{n}{2}$
18. ¿De cuántas formas se pueden sentar 12 personas en un banco de 4 personas?
    Respuesta: $12^{\underline{4}}$
19. Dado un estante con 8 libros de inglés, 7 de francés , 5 de alemán y 2 de castellano:
    a. $8 + 7 + 5 + 2$
    b. $8 * 7 * 5 * 2$
20. ¿Cuántos órdenes circulares se pueden hacer con n elementos?
    Respuesta: $(n - 1)!$
21. En un banco hay k taquillas y n clientes; ¿de cuantas formas las n personas pueden hacer colas frente a las k taquillas? (Importa el orden)
    Respuesta: $k^{\overline{n}}$
22. Se desean colocar n bolas en k cajas. ¿De cuantas formas se puede hacer esto sí?:
    a. $C_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$
    b. $d_k(n) = \binom{n+k-1}{k-1}$

c. $k^{\overline{n}}$
d. k^n
e. $S_k(n) * n!$

23. Dados 20, de los cuales sólo 3 son iguales y una repisa donde solo caben 12. ¿De cuántas formas se pueden organizar los libros en la repisa si siempre tienen que estar los 3 libros iguales?

    Respuesta: $\binom{17}{9} * 12^{\underline{9}}$

24. ¿Cuántas particiones de $[8]$ hay de tipo $(1,2,1,0,0,0,0,0)$?

    Respuesta: $\frac{8!}{\prod_{i=1}^{8}(\lambda_i! * (i!)^{\lambda_i})} = 7 * 5!$

25. Probar Combinatoriamente:
    a. $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$
    b. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

Sumatorias

26. Determinar el tercer término de la expresión $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{-x-2}{2}\right)^6$, sin desarrollar el polinomio.

    Respuesta: $(-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} * \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} * \boldsymbol{x}^{\frac{4}{3}} * \left(\frac{-x-2}{2}\right)^2$

27. Hallar la forma cerrada de las siguientes sumas:
    a. $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
    b. $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
    c. $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{5^i} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$
    d. $\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
    e. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}$
    f. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$

28. Demostrar la Serie Geométrica para $r \neq 1$.

    Respuesta: $\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\frac{(r^{n+1}-1)}{(r-1)}$

29. Demostrar la Suma Paralela.

    Respuesta: $\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$

30. Demostrar la Suma Superior.

    Respuesta: $\sum_{i=0}^{m} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$

Inclusión-Exclusión

31. En una escuela hay 200 estudiantes y existen tres materias, las cuales son Probabilidades, Trigonometría y Álgebra. En este momento hay 80 estudiantes cursando Probabilidades, 80 cursando Trigonometría y 80 cursando Álgebra. Se sabe que 30 estudiantes están cursando cualquier par de las tres materias y 15 estudiantes están cursando las tres. ¿Cuántos estudiantes no están cursando ninguna de las tres materias?

    Respuesta: 5 estudiantes no están cursando ninguna de las tres materias.

32. ¿Cuántas permutaciones de la palabra TAMELY satisfacen que la T aparece antes que la A o la A aparece antes que la M o la M aparece antes que la E?

Respuesta: $\frac{6!}{2}+\frac{6!}{2}+\frac{6!}{2}-\binom{6}{3}3!-\binom{6}{3}\binom{4}{2}2!-\binom{6}{3}3!+30$

33. Dado $A=\{0,1,2,3\}$ y $B=\{1,2,3\}$. Calcular la cantidad de funciones sobreyectivas, usando el principio de Inclusión-Exclusión.

    Respuesta: $3^4-3(2^4-1)=36$

34. Hallar cuantos números enteros positivos menores o iguales que 144 que no son divisibles por 2, 3 y 5.

    Respuesta: 39

35. Hallar cuantos números enteros positivos menores o iguales que 144 que no son divisibles por 2 ni 3 pero si por 5.

    Respuesta: 9

36. Dado una población de T individuos, tienen los siguientes gustos: a 45% de la población le gusta beber vino, a 60% le gusta beber jugo de naranja, a 55% le gusta beber té, a 35% e gusta beber vino y jugo de naranja, a 35% le gusta beber vino y té, a 35% le gusta beber jugo de naranja y té, y a 25% de la población le gusta beber las tres bebidas.
    a. ¿Qué porcentaje de la población le gusta beber sólo vino?

       Respuesta: 0%

    b. ¿Cuál es el porcentaje de la población que le gusta exactamente dos bebidas?

       Respuesta: 30%

37. Usando la Φ (Phi) de Euler calcular:
    a. ¿Cuántos números entre 1 y 30 son coprimos con 30?
       Respuesta: 8
    b. ¿Cuántos números entre 1 y 280 son coprimos con 280?
       Respuesta: 96

Recursiones

38. Resolver $X_n = X_{n-1}+\binom{n-1}{3}$ con $n \geq 4$ y $X_3=0$

    Respuesta: $X_n = 0+\binom{n}{4}$

39. Resolver $A_n = 2A_{n-1}+(-1)^n$ con $n\geq 1$ y $A_0=2$

    Respuesta: $A_n=\frac{5*2^n+(-1)^n}{3}$

40. Resolver $X_n = 1{,}06 * X_{n-1}+50$ con $n \geq 1$ y $X_0=50$

    Respuesta: $X_n=(1{,}06)^n*50+50*\left(\frac{(1{,}06)^n-1}{1{,}06-1}\right)$

41. Resolver $X_n = 2*X_{n-1}$ con $n\geq 2$ y $X_1=3$

    Respuesta: $X_n = 3*2^{n-1}$

42. Resolver $2*A_n = n*A_{n-1}+3*n!$ con $n\geq 1$ y $A_0=5$

    Respuesta: $A_n = 2^{1-n}*n!+3*n!$

43. Resolver Fibonacci con $f_0=0$ y $f_1=1$

    Respuesta: $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

44. Resolver $X_n=-4*X_{n-1}-4*X_{n-2}$ con $X_0=3$ y $X_1=2$

    Respuesta: $X_n=3*(-2)^n-4*n*(-2)^n$

45. Resolver $X_n=-4*X_{n-2}-4*X_{n-4}$ con $X_0=1$, $X_1=2$, $X_2=3$ y $X_3=2$

Respuesta: $X_n = \begin{cases} (-2)^{\frac{n}{2}} - \frac{5}{2} * \frac{n}{2} * (-2)^{\frac{n}{2}}, & si\ n\ es\ par \\ 2 * (-2)^{\frac{n-1}{2}} - 3 * \frac{n-1}{2} * (-2)^{\frac{n-1}{2}}, & si\ n\ es\ impar \end{cases}$

46. Resolver $2 * X_n + X_{n-1} - 3 * X_{n-2} = 2^n$ con $X_0 = 0$ y $X_1 = 1$

    Respuesta: $X_n = -\frac{14}{35} - \frac{6}{35} * \left(-\frac{3}{2}\right)^n + \frac{4}{7} * 2^n$

47. Resolver $2 * X_n + X_{n-1} - 3 * X_{n-2} = n - 1$

    Respuesta: $X_n = C_1 + C_2 * \left(-\frac{3}{2}\right)^n + \frac{1}{10} * n^2 + \frac{1}{50} * n$

48. Utilizando el Método dela Función Generatriz resolver $A_n = 2 * A_{n-1} + 1$ con $n \geq 1$ y $A_0 = 1$

    Respuesta: $A_n = 2^{n+1} - 1$

49. Resolver $X_n = -4 * X_{n-2} - 4 * X_{n-4}$ con $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 0$ y $n \geq 4$

    Respuesta: $X_n = 0$

50. Resolver $X_n = -4 * X_{n-2} - 4 * X_{n-4}$ con $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = 1$ y $n \geq 4$

    Respuesta: $X_n = \frac{1-2i}{2} * i^n + \frac{i-1}{2} * n * i^n + \frac{1+2i}{2} * (-i)^n + \frac{-i-1}{2} * n * (-i)^n$

Operadores

51. Determinar las siguientes expresiones:
    a. $(\Delta_h + I)(\Delta_h - I)(x^2 - 1) = (x + 2h)^2 - 1 - 2((x + h)^2 - 1)$
    b. $(E_h - 2I)(E_h - I)(2^x + x) = 2^{x+2h} + x + 2h - 3\left(2^{x+h} + x + h\right) + 2(2^x + x)$
    c. $(E_h + 2I)\left(2sen(2x)\right) = 2sen(2x + 2h) + 4sen(2x)$
    d. $\Delta_h(x2^{x+1}) = (x + h)2^{x+h+1} - x2^{x+1}$
    e. $\Delta_h\left(\frac{sen(2x)}{x+1}\right) = \frac{sen\left(2(x+h)\right)}{x+h+1} - \frac{sen(2x)}{x+1}$
    f. $2x^{(3)} - 3x^{(2)} = 2(x^3 - 3hx^2 + 2h^2x) - 3(x^2 - hx)$
52. Escribir $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como combinación lineal de $(x-1)^{(0)}$, $(x-1)^{(1)}$, $(x-1)^{(2)}$ y $(x-1)^{(3)}$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)^{(3)} + 8(x-1)^{(2)} + 10(x-1)^{(1)} + 1$
53. Resolver:
    a. $\frac{\Delta_h}{h}\left(3x^{(3)} + 2x^{(-2)}\right) = 9x^{(2)} - 4x^{(-3)}$
    b. $\frac{\Delta_h}{h}(x2^{x+1}) = \frac{2^{x+1}}{h}\left(2^h h + x\left(2^h - 1\right)\right)$
    c. $\frac{\Delta_h}{h}\left(\frac{sen(2x)}{x+1}\right) = \frac{\frac{sen\left(2(x+h)\right)}{x+h+1} - \frac{sen(2x)}{x+1}}{h}$
54. Encontrar el polinomio factorial asociado a $x^5 + x^3 - x^2 + 5$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $x^5 + x^3 - x^2 + 5 = (x-1)^{(5)} + 15(x-1)^{(4)} + 66(x-1)^{(3)} + 95(x-1)^{(2)} + 35(x-1)^{(1)} + 6$
55. Utilizando la fórmula de Gregory-Newton transformar a polinomio factorial el polinomio $2x^4 + x^2 + 3$ con $h = 1$ y $a = 1$.

    Respuesta: $2x^4 + x^2 + 3 = 2(x-1)^{(4)} + 30(x-1)^{(3)} + 51(x-1)^{(2)} + 33(x-1)^{(1)} + 28$
56. Resolver $\sum_{x=1}^{n} x(n - x)$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=1}^{n} x(n - x) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$
57. Resolver $\sum_{x=1}^{n} sen\left(\frac{\pi}{n}x\right)$. Tomando $h = 1$.

Respuesta: $\sum_{x=1}^{n} sen\left(\frac{\pi}{n}x\right) = \frac{-cos\left(\frac{\pi}{n}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)+cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

58. Resolver $\sum_{x=1}^{n} 2^x sen\left(\frac{\pi}{n}x\right)$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=1}^{n} 2^x sen\left(\frac{\pi}{n}x\right) = \frac{-2^x sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)-2^{x+1}cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{5}\Bigg|\begin{matrix} n+1 \\ x=1 \end{matrix}$

59. Resolver $\sum_{x=1}^{n} xcos(\pi x)$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=1}^{n} xcos(\pi x) = \frac{-cos(\pi n+\pi)(2n+1)-1}{4}$

60. Resolver $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)(2i+3)(2i+5)$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)(2i+3)(2i+5) = (n+1)\left(15+45n+10n^{(2)}+\frac{13}{4}n^{(3)}\right)$

61. Utilizando la Fórmula de Abel resolver $\sum_{i=1}^{n} i(-1)^{i+1}$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{i=1}^{n} i(-1)^{i+1} = \begin{cases} -\frac{n}{2} \; si\; n\; es\; par \\ \frac{n+1}{2} \; si\; n\; es\; impar \end{cases}$

62. Resolver $\sum_{x=1}^{n}\frac{(x+3)}{x(x+1)(x+2)}$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=1}^{n}\frac{(x+3)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{3*\Gamma'(x+1)}{2*\Gamma(x+1)}\Bigg|\begin{matrix} n \\ x=0 \end{matrix} - 2\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}\Bigg|\begin{matrix} n+1 \\ x=0 \end{matrix} + \frac{\Gamma'(x+1)}{2*\Gamma(x+1)}\Bigg|\begin{matrix} n+2 \\ x=0 \end{matrix}$

63. Resolver $\frac{1}{2*4}+\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(2x+1)(2x+3)}$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\frac{1}{2*4}+\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(2x+1)(2x+3)} = \frac{7}{24}-\frac{1}{4n+6}$

64. Resolver $\sum_{x=0}^{n}\frac{1}{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=0}^{n}\frac{1}{(2x+1)(2x+3)(2x+5)} = \frac{1}{12}-\frac{1}{4(4n^2+16n+15)}$

65. Resolver $\sum_{x=0}^{n}\frac{(2x+2)}{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=0}^{n}\frac{(2x+2)}{(2x+1)(2x+3)(2x+5)} = \frac{1}{4}-\frac{(n+1)}{2(2n+3)(2n+5)}-\frac{1}{4(2n+5)}-\frac{1}{2(2n+3)(2n+5)}$

66. Resolver $\sum_{x=1}^{n}(x-1)^{(2)}2^x$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=1}^{n}(x-1)^{(2)}2^x = 2^{n+1}(n^2-5n+8)-16$

67. Resolver $\sum_{x=1}^{n} x^2-2x+1$. Tomando $h = 1$.

    Respuesta: $\sum_{x=1}^{n} x^2-2x+1 = \frac{n(n-1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{6}$

Crecimiento Asintótico y Aproximación Asintótica

68. Demostrar que $3n^2+180n$ es $\Theta(n^2)$ utilizando la definición.
69. Demuestre que $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+O(x^{n+1})$.
70. Demostrar $\sqrt[n]{n} = 1+\frac{ln(n)}{n}+O\left(\frac{ln(n)^2}{n^2}\right)$ usando lo demostrado en el ejercicio anterior.
71. Hallar una aproximación asintótica, con error absoluto $O(n^{-2})$, de la expresión $\left(3n^2-n^{-1}+O(n^{-4})\right)\left(10n^2+ln(n)+O(n^{-5})\right)$
72. Determine si existe dominación asintótica, del tipo O grande u Ω entre las funciones que se indican a continuación:
    a. $f(n) = n^2$ es $O(n^2)$
    b. $f(n) = n^2+1000n$ es $O(n^2)$
    c. $f(n) = \begin{cases} n\; si\; n < 100 \\ n^3\; si\; n \geq 100 \end{cases}$ es $O(n^3)$

d. $f(n) = \begin{cases} n \; si \; n \; es \; par \\ n^3 \; si \; n \; es \; impar \end{cases}$ es $O(n^3)$

e. $f(n) = ln\left(n^{ln(2n)}\right)$ es $O(\ln^2(n))$

73. Dado f, que es $O\left(n^{\frac{-1}{3}}\right)$. Determinar $\lim_{n\to\infty} f(n)$.

    Respuesta: $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$

74. Dado f es $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Demostrar:

    a. $\frac{f(n)}{1+\frac{a}{\sqrt{n}}}$ es $O\left(\frac{1}{n}\right)$

    b. $\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)f(n)$ es $O\left(\frac{1}{n}\right)$

    c. $1+\frac{a}{\sqrt{n}}+f(n)$ es $O\left(\left(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

Bibliografía

Clases del Profesor Federico Flaviani.

Prácticas del Profesor Oscar Meza. (http://ldc.usb.ve/~meza/ci-2525/d-m2015/)

Elementos de Teoría Combinatoria de Vicente Yriarte.

Nota

Elaborado por Christian Alexander Oliveros Labrador, Cohorte 13. Ing. Computación.

Página web: oliveroschristian.wordpress.com

Actualizada: 4 de diciembre de 2016. El orden de los temas es basado en el cronograma del curso Enero-Marzo 2015 (Septiembre-Diciembre si no se cuenta el retraso).

Para cualquier corrección o sugerencia enviar un correo a christianol_01@hotmail.com. Por favor añadir página, el error y lo que debería ser.

Agradecimientos a Víctor Hernández, Alejandro Martínez y Carlos Nexans por correcciones de errores.